Institut National Polytechnique- Cycle Préparatoire -2ème année

Examen de transports et transferts thermiques du 7 décembre 2015

Durée : 1 h 30

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice fournie par la prépa est autorisée.

On rappelle que le correcteur est sensible à la lisibilité des copies, à l'orthographe ainsi qu'au style, lequel -en aucun cas-ne doit être télégraphique.

Diffusion dans une barre métallique

On considère une barre métallique cylindrique d'axe Ox et de grande longueur, de manière à limiter les effets de bords et donc à se ramener à un problème à une dimension spatiale. On appelle $n_x(x, t)$ le nombre de particules par unité de longueur, particules susceptibles de diffuser le long de la barre. A l'instant initial $t = 0$, on introduit de ces dernières dans le plan $x = 0$. On effectue ensuite des mesures de la densité linéique $n_x(x, t)$ dans le plan $x = L = 1$ mm et pour les instants $t_1 = 1$ jour et $t_2 = 2$ jours.

1. Rappeler l'équation différentielle à laquelle satisfait $n_x(x, t)$ en l'absence de production de particules, cad pour un taux nul de production de particules σ_n par unité de temps et par unité de volume. Vérifier –en outre- que $n_x(x,t) = \dfrac{n_0}{(4\pi Dt)^{1/2}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}$ est bien solution de cette équation différentielle. La constante n_0 a-t-elle une dimension physique ?
2. Les mesures effectuées à la position $x = L$ aux instants t_1 et t_2 donnent un rapport $n_{x,2} / n_{x,1} = 3$ pour les densités linéiques. Donner l'expression littérale du coefficient de diffusion D en fonction de L, t_1 et t_2, $n_{x,2}$ et $n_{x,1}$. Le calculer en unités *SI*.
3. Calculer la quantité L^2 / D et commenter.

Conductivité thermique

Les extrémités A_1 et A_2 d'un système unidimensionnel selon Ox, considéré en régime stationnaire, sans source d'énergie interne σ_u, et distantes de $l = 20$ cm, sont maintenues aux températures $T_1 = 300$ °K et $T_2 = 900$ °K. Dans le modèle, la conductivité thermique est inversement proportionnelle à la température selon $\lambda = \lambda_0 (T_0/T)$ avec $\lambda_0 = 8{,}5$ W m^{-1} °K^{-1} et $T_0 = 1000$ °K.

1. Rappeler en régime stationnaire et sans source d'énergie interne σ_u, l'expression de $T_0(x)$ lorsque la conductivité est constante et égale à λ_0.
2.
   a. Etablir l'expression de $T(x)$ pour une conductivité λ inversement proportionnelle à la température T. On pourra repartir de l'expression générale de l'équation différentielle de la diffusion thermique en ré-exprimant le vecteur courant volumique d'énergie interne $\boldsymbol{J}_U$ à l'aide de la loi phénoménologique de Fourier.

b. Etablir l'expression littérale de la valeur moyenne de la température $T(x)$ entre A_1 et A_2 donnée par $\langle T \rangle = \frac{1}{l}\int_0^l T(x)dx$. La calculer.

c. Etablir l'expression du module du vecteur courant volumique d'énergie interne $\boldsymbol{J}_U$ en fonction de λ_0, T_0, l, T_1 et T_2, puis le calculer.

3. En quel point de l'axe Ox l'écart $T(x) - T_0(x)$ est-il maximum ? Calculer la valeur du x correspondant.